Electrostatique

Généralités :

S dans une région de l'espace, une charge électrique q est soumise à l'action d'une force électrostatique $\vec{F}$, dans cette région règne un champ électrostatique.

On considère une région où règne un champ électrostatique. Si on place au point A de cette région différents corps électrisés portant les charges $q_1, q_2, \ldots, q_n,$ ils seront respectvement soumis à l'actions des forces électrostatiques $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \ldots, \vec{F_n}$.

Ces forces sont telles que :

$$\frac{\vec{F_1}}{q_1} = \frac{\vec{F_2}}{q_2} = \ldots = \frac{\vec{F_n}}{q_n} = cte \quad .$$

Cette constante est une grandeur vectorielle caractéristique du champ électrostatique au point A.

Force électrostatique :

Considérons une charge ponctuelle q placée en un point M de l'espace, et supposons qu'en ce point il existe un champ électrique **E**(M), dérivant du potentiel V(M) qu'on supposera nul à l'infini. La charge est soumise à la force :

$$F = qE(M)$$

I. Charge électrique :

I.1 Définition :

La charge électrique est définie à partir de ses effets (interactions avec des corps chargés).

Une quantité de charges peut être subdivisée en sous-quantités élémentaires jusqu'à une limite inférieures qui est la charge élémentaire d'un électron ($e = 1{,}6.\,10^{-19} Coulomb¿$.

I.2 Répartitions de charge :

On distingue deux types de répartitions de charge :

- Une distribution discrète de charge est un ensemble fini ou infini de charges ponctuelles.
- Une distribution continue est un ensemble infini de charges infiniment réparties dans l'espace selon une géométrie particulière :

- ✓ Distribution linéique :

La charge est continument répartie sur une courbe. La densité linéique de charge λ est définie par :

$$\lambda = \frac{dq}{dt}\left(c\,.\,m^{-1}\right)$$

Où dq est la charge élémentaire portée par un élément de longueur dl de cette courbe.

- ✓ Distribution surfacique :

La charge est répartie d'une manière continue sur une surface. La densité de charge surfacique est définie par :

$$\sigma = \frac{dq}{dS}\left(c\,.\,m^{-2}\right)$$

- ✓ Distribution volumique :

La charge est répartie de manière continue dans un volume. La densité volumique de charge en un point M de ce volume est donnée par :

$$\rho = \frac{dq}{d\tau}\left(c\,.\,m^{-3}\right)$$

II. Loi de Coulomb :

Une charge ponctuelle q, placée en M, exerce sur une autre charge ponctuelle q', placée en M', une force

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,q'}{MM'^2}\frac{MM'}{\|MM'\|}$$

C'est la *loi de Coulomb* et la force est dite *Coulombienne*.

On sait qu'une charge q placée en M, crée en un point M' tel que $MM' = r\,u_r$, un champ électrique :

$$E(M')=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}u_r$$

On peut donc interpréter la loi de Coulomb en disant que la charge q' est soumise de la part de q à une force :

$$F=q' E(M')$$

I. Champ électrique :

IV.1 Champ électrique créé par une charge ponctuelle

Soit une charge q placée en un point P de l'espace, crée en tout point M de l'espace qui l'entoure, un champ électrostatique :

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

$\vec{E}(M)$ est une grandeur vectorielle fonction du point M.

A chaque point M de l'espace, on fait correspondre un vecteur $\vec{E}(M)$.

IV.2 Champ électrique créé par une distribution discrète de charge

Soit un ensemble de N charges ponctuelles q_i (i=1, 2, …., N) placées en différents point P_i de l'espace.

$$\vec{E}=\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\vec{u}_i$$

Avec $\vec{u}_i=\frac{\overrightarrow{P_i M}}{\|\overrightarrow{P_i M}\|}$ et $r_i=\|\overrightarrow{P_i M}\|$

Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par les N charges est :

$$\vec{E}(M)=\sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i(M)=\sum_{i=1}^{N}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\vec{u}_i$$

IV.3 Champ électrique créé par une distribution continue de charge

Soit une distribution volumique de charges contenue dans le volume (V).

Soit un élément de volume *dτ* autour d'un point P. Cet élément de volume *dτ* contient une charge élémentaire *dq* définie par :

$$dq=\rho(P)\,d\tau$$

Cette charge élémentaire *dq* peut être considérée comme ponctuelle et crée alors un champ électrostatique en tout point M de l'espace :

$$\overrightarrow{dE}(M)=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}=\frac{\rho(P)d\tau}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}$$

Le champ électrostatique total créé par la distribution continue de charge est la somme vectorielle de tous les champs élémentaires $\overrightarrow{dE}(M)$.

$$\vec{E}(M)=\int\overrightarrow{dE}(M)=\int\frac{\rho(P)d\tau}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}$$

$$\vec{E}(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(P)d\tau_P}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}\overrightarrow{PM}$$

Symétrie de la distribution de charge et caractéristique du champ $\vec{E}$

L'étude de la distribution de charges permet d'obtenir des renseignements sur la direction du champ $\vec{E}$ et les variables d'espace dont dépend $\vec{E}$ **.**

Ces informations permettent de faire le choix convenable du système de coordonnées, c'est-à-dire le système adapté à la symétrie de la distribution.

La distribution de charge est dite symétrique, si elle reste invariante dans une opération de symétrie qui correspond à une certaine transformation géométrique.

Les opérations de symétrie que nous utiliserons sont :

La translation
La rotation autour d'un axe
La rotation autour de plusieurs axes concourant en un point
La symétrie par rapport à un plan

V.1 Elément de symétrie et variables d'espace :

Symétrie de translation :

Si la densité de charges reste invariante dans toute translation parallèle à un axe, ($\overrightarrow{z'z}$ par exemple), La densité de charges est alors indépendante de z. Par conséquent le champ $\vec{E}$ créé par cette distribution est indépendant de z.

Symétrie de révolution :

Si une distribution de charges reste invariante dans toute rotation autour d'un axe ($\overrightarrow{z'z}$ par exemple), elle présente une symétrie de révolution. Le système de coordonnées convenable à cette symétrie est le système de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z). L'axe $\overrightarrow{z'z}$ étant l'axe de révolution.

Du fait de la symétrie de révolution autour de $\overrightarrow{z'z}$, la densité de charges est indépendantes de l'angle θ de rotation, par conséquent, le champ $\vec{E}(\rho, \theta, z)$ ne dépend pas de θ.

Donc :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(\rho, z)$$

Symétrie de révolution et de translation :

Si la distribution présente en plus de la symétrie de révolution une symétrie de translation parallèlement à un axe $\overrightarrow{z'z}$, alors le champ $\vec{E}(M)$ est indépendant de θ et de z alors :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(\rho)$$

Symétrie sphérique :

Si la distribution de charges est invariante dans les rotations autour de tout axe passant par un point fixe O, elle présente la symétrie sphérique.

Dans ce cas le système de coordonnées le plus adéquat est le système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) et la densité de charge ne dépend ni de θ ni de φ, donc le champ $\vec{E}(M)$ ne dépend que de r.

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r)$$

V.2 Plan de symétrie et direction du champ

Soit une distribution de charges définie par sa densité volumique de charge *ρ(P)*.

Si pour tout point P' symétrique de P par rapport au plan (π), on a $\rho(P) = \rho(P')$ alors le plan (π) est un plan de symétrie paire.
Si $\rho(P) = -\rho(P')$ on dit que le plan (π) est un plan de symétrie impaire.

Dans le cas d'une distribution de charges présentant un plan de symétrie paire (π), le champ $\vec{E}$ créé par cette distribution en tout point du plan (π) est contenu dans ce plan de symétrie paire (π).

Si une distribution de charge présente un plan de symétrie impaire (π'), Le champ $\vec{E}$ créé en tout point M appartenant au plan (π') est normal à ce plan de symétrie impaire.

Théorème de GAUSS :

VI.1 Flux électrique dans le vide :

On appelle flux du champ électrique à travers une surface S orientée, dans le vide la quantité suivante :

$$\Phi=\int \vec{E}.\vec{dS}$$

Alors :

$$d\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

Où : $d\Omega=\frac{\vec{u}.d\vec{S}}{r^2}$

$\vec{dS}$ est un élément de surface entourant le point M. On oriente cette surface en choisissant un sens de parcours sur le contour qui l'entoure. $d\vec{S}=dS.\vec{n}$

VI.2 Théorème de GAUSS :

Soit une surface fermée, enveloppant un certain volume, orientée de l'intérieur vers l'extérieur. Le flux du champ électrique sortant à travers cette surface est égal à la somme algébrique des charges intérieures à cette surface multipliée par $\frac{1}{\varepsilon_0}$:

$$q_{\int ¿}$$

$$\Phi=\oint \vec{E}\,\vec{dS}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum ¿$$